МОСКОВСКИЙ АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ (МАДИ)

Г.С. БЕЛЯКОВ, С.А. ГУЖОВ

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ВЫПУСКНЫХ КВАЛИФИКАЦИОННЫХ РАБОТ БАКАЛАВРА

МОСКОВСКИЙ АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
(МАДИ)

Кафедра экономики дорожного хозяйства

Утверждаю
Зав. кафедрой профессор
____________ Э.В. Дингес
«___» __________ 2015 г.

Г.С. БЕЛЯКОВ, С.А. ГУЖОВ

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ВЫПУСКНЫХ КВАЛИФИКАЦИОННЫХ РАБОТ БАКАЛАВРА

МОСКВА
МАДИ
2015

УДК 334.7:519.86
ББК 65.054.103
Б448

Беляков, Г.С.
Б448 Методические рекомендации по использованию экономико-математических методов при выполнении выпускных квалификационных работ бакалавра / Г.С. Беляков, С.А. Гужов. – М.: МАДИ, 2015. – 52 с.

В методических рекомендациях рассмотрены основные классы экономических задач и некоторые экономико-математические методы поиска их оптимальных решений. Основное внимание уделено методам, которые редко освещаются в учебной литературе.

Рекомендации предназначены для бакалавров, обучающихся по направлению подготовки 080100 «Экономика», профиль – «Экономика предприятий и организаций (строительство)».

УДК 334.7:519.86
ББК 65.054.103

© МАДИ, 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Процесс принятия решений с помощью экономико-математических методов можно разделить на ряд этапов, основными из которых являются: 1) постановка задачи; 2) построение математической модели задачи; 3) выбор метода решения; 4) решение задачи и использование полученных результатов.

Целью первого этапа является четкая формулировка проблемы и комплекса вопросов, на которые требуется получить ответы. На данном этапе: а) определяется критерий оптимальности задачи; б) уточняются ограничивающие условия задачи; в) выявляются факторы, которые влияют на развитие рассматриваемого процесса.

Критерий оптимальности – это некоторый показатель, имеющий экономический смысл и отражающий цели управления рассматриваемым процессом. Наличие критерия оптимальности позволяет количественно сравнивать различные варианты управления процессом. Выбор критерия оптимальности является центральным пунктом постановки задачи.

Ограничивающие условия определяют границы области протекания рассматриваемого процесса и накладывают ограничения на возможность выбора способов достижения поставленных целей.

Факторы, оказывающие влияние на развитие любого процесса, можно разделить на управляемые и неуправляемые.

Информация о неуправляемых факторах собирается на этапе постановки задачи и затем используется для её решения. Конкретные значения управляемых факторов (управляемых переменных), наоборот, определяются только в результате решения задачи (хотя диапазон их возможных значений известен заранее).

Разные наборы значений управляемых переменных соответствуют разным вариантам решения задачи. Цель заключается в определении наилучшего с точки зрения критерия оптимальности набора значений управляемых переменных.

Неуправляемые факторы, в зависимости от степени информированности о них исследователя, разделяются на детерминированные, случайные и неопределённые.

Детерминированными называются факторы, значения которых фиксированы и известны исследователю.

Случайными или стохастическими называются факторы, для которых известен вид закона распределения и его характеристики (например, математическое ожидание и дисперсия).

Неопределёнными называются факторы, для которых известен только диапазон их возможных значений, но неизвестно, какое конкретно значение они примут в тот или иной момент.

Если в задаче учитываются только управляемые переменные и детерминированные факторы, то имеет место задача принятия решений в условиях определенности.

Если рассматриваются управляемые переменные, детерминированные и случайные факторы, то возникает задача принятия решений в условиях риска.

Если в расчётах учитываются также и неопределённые факторы, то приходится иметь дело с задачей принятия решений в условиях неопределённости.

Решение однокритериальных задач в условиях определённости в настоящие время принципиальных трудностей не вызывает. Это наиболее проработанный раздел математики. Более сложным является принятие решений в условиях риска, самым сложным – в условиях неопределённости.

Используя результаты первого этапа, на втором этапе строят математическую модель задачи.

Математическая модель записывается обычно в виде системы уравнений, которые «увязывают» между собой управляемые и неуправляемые факторы, оказывающие влияние на развитие рассматриваемого в рамках задачи процесса.

Основными элементами математической модели являются целевая функция и система ограничений.

Целевая функция представляет собой математическое выражение (формулу), которое устанавливает взаимосвязь между значениями управляемых переменных и неуправляемых факторов, с одной стороны, и величиной критерия оптимальности, с другой стороны.

Не следует смешивать между собой понятия «критерий оптимальности» и «целевая функция». Критерий оптимальности – это некоторый показатель, а целевая функция – формула, с помощью которой определяют величину этого показателя.

Система ограничений, как правило, представляет собой систему уравнений, которые устанавливают взаимосвязь между значениями управляемых и неуправляемых факторов, с одной стороны, и ограничивающими условиями задачи, с другой стороны.

В общем случае однокритериальная математическая модель выглядит следующим образом:

$$Z = f(x, y) \to \text{extr};$$

$$g_i(x, y) \{<, \leq, =, \geq, >\} 0,$$

где x – множество управляемых переменных; y – множество неуправляемых факторов; f – целевая функция; g_i, $i = 1, \dots, m$ – система ограничений.

При построении модели следует помнить, что неприемлемы как чрезмерное упрощение модели, приводящее к значительному искажению изучаемого явления, так и излишнее её усложнение, затрудняющее или даже исключающее возможность решения модели.

Построенную модель нужно решить. Допустимым решением модели называется такой набор значений управляемых переменных, который удовлетворяет системе ограничений модели. Количество допустимых решений определяет размерность задачи. Многие экономические задачи характеризуются колоссальной размерностью с триллионами вариантов решений.

Среди множества допустимых решений модели, как правило, находится одно решение, при котором целевая функция достигает экстремального значения. Такое решение называется оптимальным.

Самая совершенная и адекватная изучаемому процессу математическая модель при отсутствии метода поиска её оптимальных решений бесполезна, так как не может быть практически использована.

Если количество допустимых решений модели невелико, то, конечно, можно обойтись без математических методов, пойдя по пути их полного перебора. Однако это удается сделать только в простейших случаях. Большинство экономических задач имеют весьма значительную размерность, и их невозможно решить без использования специальных методов.

Методы, которые в настоящие время имеются в распоряжении исследователя, можно разделить на две основные группы: аналитические и численные.

К аналитическим относятся методы нахождения безусловного экстремума, метод множителей Лагранжа и ряд других. Они позволяют за один просчёт получить точное решение задачи. Однако применение аналитических методов возможно лишь при выполнении ряда жёстких условий. Так, целевая функция и ограничения задачи должны быть, по крайней мере, дважды дифференцируемыми функциями, а ограничения, кроме того, должны иметь вид строгих равенств. Во многих практических задачах эти условия не выполняются, поэтому аналитические методы находят лишь ограниченное применение.

Гораздо чаще для решения экономических задач применяют численные методы, к которым относятся методы линейного, нелинейного, дискретного, динамического программирования и некоторые другие. Численные методы представляют собой итеративные процедуры, позволяющие получить окончательное решение путем многоэтапных расчётов по определенному алгоритму. Как правило, они предусматривают формирование на первом этапе некоторого первоначального решения и последовательное, шаг за шагом, его улучшение.

Численные методы в зависимости от качества получаемых с их помощью решений можно разделить на точные и приближённые.

Точные методы обеспечивают нахождение оптимального решения задачи, однако, зачастую требуют больших затрат времени на поиск решения. Приближённые методы, наоборот, характеризуются большим быстродействием, но не гарантируют нахождение оптимума.

Результаты, полученные при решении математической модели задачи с помощью выбранного метода, нужно проверить на достоверность. Если их достоверность не вызывает сомнений, то полученное математическое решение облекают в соответствующую содержательную форму и в виде инструкций или рекомендаций доводят до сведения лиц, принимающих решение.

Задачи, с которыми приходится сталкиваться в процессе принятия решений в различных сферах человеческой деятельности, при всём их многообразии в большинстве случаев можно в зависимости от их содержания отнести к одному из следующих классов:

- задачи распределения ресурсов;
- задачи управления запасами;
- задачи упорядочивания;
- задачи замены;
- задачи выбора маршрута;
- задачи массового обслуживания.

1. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЗАМЕНЫ

В процессе эксплуатации средства труда изнашиваются физически и морально. Поэтому одной из важных экономических проблем является определение оптимального режима эксплуатации и замены средств труда. Задачи, связанные с решением данной проблемы, называются задачами замены оборудования. Существуют два основных типа задач замены.

В одних рассматривается оборудование с неухудшающимися в процессе эксплуатации характеристиками. Такое оборудование сохраняет достаточно высокую эффективность на протяжении всего срока службы, но после выхода из строя ремонту уже не подлежит (прежде всего из-за экономической нецелесообразности ремонта). Оно обычно имеет небольшую массу и стоимость. В качестве примера можно привести свёрла, электрические батарейки, электрические лампы, автомобильные рессоры и шины, приводные ремни.

Задачи этого типа заключаются в определении такой стратегии замены, при которой сводятся к минимуму издержки, включающие в себя затраты на приобретение новой техники, потери из-за отказов оборудования и расходы на его замену.

Существуют две противоположные стратегии замены: индивидуальная и групповая.

При стратегии индивидуальной замены средства труда заменяются только при отказах, т.е. индивидуально. В этом случае снижаются затраты на приобретение нового оборудования, однако велики потери из-за его отказов и расходы на замену.

При стратегии групповой замены, наоборот, снижаются потери из-за отказов и расходы на замену оборудования, но возрастают затраты на покупку новой техники. Простейшая стратегия групповой замены предусматривает замену всего оборудования некоторого вида через определенные промежутки времени, а в пределах этих периодов – замену только отказавшего оборудования. Возможны и более сложные стратегии групповой замены.

Для решения задач замены первого типа используют методы математического анализа и математической статистики.

В задачах замены второго типа рассматривается оборудование, характеристики которого ухудшаются в процессе эксплуатации. Эффективность такого оборудования по мере его старения постепенно снижается. Однако она может быть частично или полностью восстановлена путём проведения ремонта. Оборудование с ухудшающимися характеристиками, как правило, имеет большую массу и стоимость, например, силовые и рабочие машины, транспортные средства и т.п.

Основным параметром такого оборудования является его возраст. С увеличением срока службы растут затраты на поддержание оборудования в рабочем состоянии, а его производительность снижается. Это ведёт к возрастанию себестоимости выпуска продукции.

Частая замена оборудования позволяет увеличить количество произведённой продукции и уменьшить затраты на ремонт, однако вызывает рост затрат на приобретение новой техники. Если же замену оборудования производят редко, то увеличиваются затраты на выпуск продукции.

Задачи замены второго типа сводятся к определению таких сроков ремонта, модернизации или замены оборудования, которые позволяют максимизировать прибыль, получаемую от его эксплуатации, или минимизировать затраты, связанные с использованием оборудования в течение рассматриваемого периода времени.

Задачи замены второго типа чаще всего решаются методом динамического программирования.

Динамическое программирование представляет собой математический аппарат, ориентированный на задачи, процесс решения которых может быть разделен на отдельные этапы. В основе теории динамического программирования находится принцип оптимальности, сформулированный Р. Беллманом.

Динамическое программирование является мощным и плодотворным методом оптимизации, который остается работоспособным даже в случае дискретности переменных или нелинейности целевой функции или ограничений задачи.

Динамическое программирование имеет и свои недостатки. В отличие от линейного программирования, в котором симплексный метод является универсальным, в динамическом программировании такого универсального метода нет. Общие принципы динамического программирования приходится конкретизировать применительно к особенностям каждой рассматриваемой задачи. Другим недостатком динамического программирования является быстрый рост трудоёмкости вычислений при увеличении количества переменных в задаче.

Одним из условий применимости метода динамического программирования является аддитивность целевой функции задачи. Целевая функция называется аддитивной, если её итоговая величина находится как простая сумма результатов, полученных на отдельных этапах.

Метод динамического программирования применим также и к задачам с мультипликативной целевой функцией, которая представляет собой произведение результатов, полученных на отдельных этапах.

Основными понятиями динамического программирования являются понятия «состояние системы» и «управление».

Понятие «состояние системы» является наиболее важным понятием динамического программирования. Оно обеспечивает взаимосвязь между отдельными этапами решения задачи.

Состояние системы не является постоянным, она может переходить из одного состояния в другое. Совокупность всех состояний, в которых может находиться система, называют областью возможных состояний, среди которых выделяют начальное и конечное состояния системы.

Для описания состояния системы используют один или несколько числовых параметров. Для этого необходимо выбирать такие параметры, которые дадут возможность на каждом отдельном этапе рассматривать только те варианты локальных решений, которые не противоречат общим ограничениям задачи. От удачного выбора параметров зависит возможность успешного решения задачи методом динамического программирования. При увеличении количества параметров возрастает размерность задачи и трудоёмкость её решения.

Управлениями в динамическом программировании называют мероприятия, с помощью которых осуществляется перевод системы из одного состояния в другое. Управления, удовлетворяющие ограничениям задачи, называются допустимыми. Разные управления поразному влияют на величину целевой функции задачи. Чтобы иметь возможность сравнивать их, каждому управлению ставят в соответствие величину связанного с ним выигрыша (если задача решается на максимум целевой функции) или затрат (если задача решается на минимум).

Задача динамического программирования состоит в том, чтобы из множества допустимых выбрать такие управления, которые переводят систему из начального состояния в конечное так, что целевая функция достигает своего экстремального значения. Совокупность таких управлений называют оптимальной стратегией.

Метод динамического программирования представляет собой определенную вычислительную схему, которую необходимо конкретизировать применительно к особенностям рассматриваемой задачи [1]. В общем случае решение задачи методом динамического программирования связано с выполнением следующих действий.

1. Разделить процесс решения задачи на n этапов. Иногда разделение на этапы бывает задано в самой постановке задачи, в других

случаях его приходится вводить искусственно. Следует отметить, что задача динамического программирования может решаться как в прямом (начиная с 1-го и заканчивая n-м этапом), так и в обратном направлениях (начиная с n-го этапа). Большее распространение получил обратный порядок решения.

2. Установить параметры, характеризующие состояние рассматриваемой системы перед началом j-го этапа ($j = 1, \ldots, n$), и сформировать множество возможных состояний. Если определение таких параметров вызывает затруднение, следует попытаться ответить на вопрос: какая информация о предыдущих этапах необходима для принятия допустимого решения на j-м этапе. Это, как правило, помогает разрешить возникшие трудности.

3. Выяснить набор допустимых управлений для каждого состояния системы на каждом этапе. Для динамического программирования важно, чтобы набор управлений на j-м этапе определялся только состоянием, в котором система оказалась перед началом j-го этапа, и не зависел от того, каким образом система пришла в это состояние.

4. Сформировать функциональное уравнение динамического программирования для рассматриваемой задачи. Функциональным уравнением называют аналитическую запись принципа оптимальности, который находится в основе вычислительной схемы динамического программирования. Его можно сформулировать следующим образом: *в каком бы состоянии ни оказалась система перед началом j-го этапа, управление на j-м этапе для этого состояния нужно выбирать так, чтобы максимизировать выигрыш (или минимизировать затраты) на этапах с j-го по n-й, а не только на j-м этапе*. Функциональные уравнения для разных задач имеют различный вид.

5. Произвести условную оптимизацию, т.е. для каждого возможного состояния системы на каждом этапе, начиная с последнего (n), решить функциональное уравнение. В рамках каждого функционального уравнения для фиксированного состояния рассматривают все допустимые на j-м этапе управления и среди них выбирают условно-оптимальное. Условно-оптимальным называется такое управление, которое позволяет максимизировать выигрыш (или минимизировать

затраты) на этапах с *j*-го по *n*-й. Дойдя до первого этапа и решив функциональное уравнение для начального состояния системы, определяют величину максимального выигрыша (или минимальных затрат) за все *n* этапов.

6. Определить оптимальную стратегию. Для этого просматривают этапы, начиная с 1-го, и используют результаты условной оптимизации. В итоге из всей совокупности условно-оптимальных управлений отбирают *n* управлений (по одному для каждого этапа), которые позволяют перевести систему из начального состояния в конечное с максимальным выигрышем (или минимальными затратами).

Рассмотрим пример использования этого метода для **оптимизации сроков ремонта оборудования** – одной из задач замены второго типа. Её можно сформулировать следующим образом.

Составляется график ремонта нового комплекта машин, который дорожная организация начала эксплуатировать с октября 2014 г., на следующий год. Примем для простоты, что профилактический ремонт оборудования может производиться не чаще одного раза в три месяца, в начале квартала. Затраты на ремонт и эксплуатацию оборудования зависят от времени, прошедшего с момента последнего ремонта оборудования (табл. 1.1). Требуется установить сроки проведения ремонтов так, чтобы суммарные годовые затраты на ремонт и эксплуатацию оборудования оказались минимальными.

Таблица 1.1

Показатели	Время *t*, прошедшее с момента последнего ремонта (кварталов)				
	0	1	2	3	4
Затраты на ремонт $f(t)$, тыс. руб.	–	300	400	500	600
Затраты на эксплуатацию $g(t)$, тыс. руб.	500	600	750	900	1150

1. Процесс решения этой задачи разделим на 4 этапа в соответствии с количеством кварталов в году.

2. Состояние системы перед началом *j*-го этапа в рассматриваемой ситуации можно охарактеризовать одним параметром *t* – временем, прошедшим с момента последнего ремонта оборудования. В рамках 2015 г. будем отсчитывать это время от величины $t_н$ – количе-

ства кварталов, прошедших после последнего ремонта (для нового оборудования – после начала эксплуатации) по состоянию на 01.01.2015 г. Согласно условиям рассматриваемого примера, $t_н = 1$.

В общем случае следует учитывать ещё и второй параметр – возраст (срок эксплуатации) оборудования.

3. Для каждого состояния на j-м этапе рассматривают два возможных управления – ремонтировать или не ремонтировать оборудование в начале j-го квартала, $j = 1, ..., 4$.

4. Функциональное уравнение задачи запишем в следующем виде:

уравнение для 4-го этапа

$$d_4(t) = \min\left\{\begin{array}{l} g(t), \text{ если не ремонтируется} \\ f(t) + g(0), \text{ если ремонтируется} \end{array}\right\};$$

уравнение для j-го этапа, $j = 3, 2, 1$

$$d_j(t) = \min\left\{\begin{array}{l} g(t) + d_{j+1}(t+1), \text{ если не ремонтируется} \\ f(t) + g(0) + d_{j+1}(1), \text{ если ремонтируется} \end{array}\right\},$$

где $g(t)$ – затраты на эксплуатацию комплекта машин в течение квартала, если с момента его последнего ремонта прошло t кварталов; $g(0)$ – затраты на эксплуатацию в течение квартала, если комплект машин был отремонтирован в этом квартале; $f(t)$ – затраты на ремонт оборудования, если с момента его последнего ремонта прошло t кварталов; $d_j(t)$ – минимально возможные затраты на ремонт и эксплуатацию оборудования с j-го квартала до конца 2015 г., если к началу j-го квартала 2015 г. с момента последнего ремонта оборудования прошло t кварталов.

Функциональное уравнение для последнего этапа несколько проще. Дело в том, что на j-м этапе, в соответствии с принципом оптимальности динамического программирования, помимо затрат j-го этапа необходимо учитывать расходы, которые будут произведены на всех последующих этапах. Но для последнего этапа не существует последующих этапов, поэтому учитываются издержки только на самом n-м этапе.

Произведём условную оптимизацию, начиная с последнего этапа.

4-й этап

К началу 4-го этапа система может оказаться в одном из четырех состояний: t = 1, 2, 3 или $t_н + 3 = 4$ (с момента последнего ремонта оборудования прошло 1, 2, 3 или 4 (т.е. оно ни разу не ремонтировалось) квартала). Для каждого из этих состояний решаем функциональное уравнение

$$d_4(1) = \min \left\{ \begin{array}{c} g(1) = 600, \text{ если не рем.} \\ f(1) + g(0) = 300 + 500, \text{ если рем.} \end{array} \right\} = 600.$$

Таким образом, для состояния $t = 1$ условно-оптимальное управление заключается в том, чтобы не ремонтировать машины в начале 4-го квартала. В этом случае затраты за 4-й квартал будут минимальными и составят 600 тыс. руб.

$$d_4(2) = \min \left\{ \begin{array}{c} g(2) = 750, \text{ если не рем.} \\ f(2) + g(0) = 400 + 500, \text{ если рем.} \end{array} \right\} = 750.$$

Соответственно, для состояния $t = 2$ условно-оптимальное управление заключается в том, чтобы не производить ремонт в начале 4-го квартала. В этом случае затраты за 4-й квартал составят 750 тыс. руб.

$$d_4(3) = \min \left\{ \begin{array}{c} g(3) = 900, \text{ если не рем.} \\ f(3) + g(0) = 500 + 500, \text{ если рем.} \end{array} \right\} = 900.$$

Таким образом, и для состояния $t = 3$ условно-оптимальное управление сводится к тому, чтобы отказаться от ремонта в начале 4-го квартала. В этом случае затраты за 4-й квартал составят 900 тыс. руб.

$$d_4(4) = \min \left\{ \begin{array}{c} g(4) = 1150, \text{ если не рем.} \\ f(4) + g(0) = 600 + 500, \text{ если рем.} \end{array} \right\} = 1100.$$

Следовательно, для состояния $t = 5$ условно-оптимальное управление заключается в том, чтобы отремонтировать машины в начале 4-го квартала.

3-й этап

К началу 3-го этапа система может оказаться в одном из трех состояний: t = 1, 2 или $t_н + 2 = 3$ (с момента последнего ремонта машин прошло 1, 2 или 3 (т.е. они ни разу не ремонтировались) квартала). Для каждого из этих состояний решаем функциональное уравнение

$$d_3(1) = \min\begin{Bmatrix} g(1) + d_4(1+1) = 600 + 750, \text{ если не рем.} \\ f(1) + g(0) + d_4(1) = 300 + 500 + 600, \text{ если рем.} \end{Bmatrix} = 1350.$$

Таким образом, для состояния $t = 1$ условно-оптимальное управление состоит в том, чтобы не ремонтировать машины в начале 3-го квартала. В этом случае затраты за 3-й и 4-й кварталы будут минимальными и составят 1350 тыс. руб.

$$d_3(2) = \min\begin{Bmatrix} g(2) + d_4(2+1) = 750 + 900, \text{ если не рем.} \\ f(2) + g(0) + d_4(1) = 400 + 500 + 600, \text{ если рем.} \end{Bmatrix} = 1500.$$

Следовательно, для состояния $t = 2$ условно-оптимальное управление заключается в том, чтобы осуществить ремонт в начале 3-го квартала.

$$d_3(3) = \min\begin{Bmatrix} g(3) + d_4(3+1) = 900 + 1100, \text{ если не рем.} \\ f(3) + g(0) + d_4(1) = 500 + 500 + 600, \text{ если рем.} \end{Bmatrix} = 1600.$$

Таким образом, для состояния $t = 3$ условно-оптимальное управление сводится к тому, чтобы отремонтировать машины в начале 3-го квартала.

2-й этап

К началу 2-го этапа система может оказаться в одном из двух состояний: $t = 1$ или $t_н + 1 = 2$. Для каждого из этих состояний решаем функциональное уравнение

$$d_2(1) = \min\begin{Bmatrix} g(1) + d_3(1+1) = 600 + 1500, \text{ если не рем.} \\ f(1) + g(0) + d_3(1) = 300 + 500 + 1350, \text{ если рем.} \end{Bmatrix} = 2100.$$

Соответственно, для состояния $t = 1$ условно-оптимальное управление состоит в том, чтобы не ремонтировать машины в начале 2-го квартала.

$$d_2(2) = \min\begin{Bmatrix} g(2) + d_3(2+1) = 750 + 1600, \text{ если не рем.} \\ f(2) + g(0) + d_3(1) = 400 + 500 + 1350, \text{ если рем.} \end{Bmatrix} = 2250.$$

Таким образом, для состояния $t = 2$ условно-оптимальное управление заключается в том, чтобы произвести ремонт машин в начале

2-го квартала. В этом случае затраты за 2-й, 3-й и 4-й кварталы окажутся минимальными и составят 2250 тыс. руб.

1-й этап

В начале 1-го этапа система находится в состоянии $t = t_н = 1$. Решим соответствующее функциональное уравнение.

$$d_1(1) = \min \begin{Bmatrix} g(1) + d_2(1+1) = 600 + 2250, \text{ если не рем.} \\ f(1) + g(0) + d_2(1) = 300 + 500 + 2100, \text{ если рем.} \end{Bmatrix} = 2850.$$

Следовательно, для начального состояния системы условно-оптимальное управление заключается в том, чтобы не ремонтировать машины в начале 1-го квартала. Таким образом, минимально возможная величина суммарных годовых затрат на ремонт и эксплуатацию оборудования в течение 2015 г. составляет 2850 тыс. руб.

В заключение определяем оптимальную стратегию. Как было выяснено на 1-м этапе, в начале 1-го квартала производить ремонт нецелесообразно. Следовательно, к началу 2-го этапа система окажется в состоянии $t = t_н + 1 = 2$. Оптимальное управление для этого состояния на 2-м этапе состоит в том, чтобы выполнить ремонт машин в начале 2-го квартала. Соответственно, к началу 3-го этапа система перейдёт в состояние $t = 1$. Оптимальное управление для этого состояния на 3-м этапе заключается в том, чтобы не ремонтировать машины. Таким образом, к началу 4-го этапа система перейдёт в состояние $t = 2$. Оптимальное управление для данного состояния на 4-м этапе сводится к тому, чтобы отказаться от ремонта.

Квартал 2015 г.	1	2	3	4
Оптимальная стратегия	–	ремонт	–	–

2. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

Задача распределения ресурсов возникает тогда, когда нужно распределить ограниченные и взаимозаменяемые ресурсы между нуждающимися в них работами. Большое количество задач, по сути, являются задачами распределения ресурсов.

В зависимости от исходных условий задачи этого класса можно разделить на три основные группы (типа): 1) заданы и работы, и ресурсы; требуется оптимальным образом распределить ресурсы между работами; 2) заданы только наличные ресурсы; требуется выбрать работы, которые с их помощью можно выполнить наиболее эффективно; 3) заданы только работы, которые необходимо выполнить; требуется определить, какие ресурсы потребуются для их эффективного выполнения.

2.1. Задачи распределения ресурсов 1-го типа

Задачи распределения ресурсов 1-го типа характеризуются следующими условиями.

1. Имеется ряд работ, которые должны быть выполнены.

2. По крайней мере, некоторые из этих работ можно выполнить различными способами, используя различные количества и комбинации ресурсов.

3. Одни способы выполнения работ лучше других (например, менее дороги или более прибыльны).

4. Имеющегося в наличии количества ресурсов достаточно для выполнения всех работ тем или иным способом, но недостаточно для выполнения каждой работы оптимальным способом.

Задача распределения ресурсов 1-го типа заключается в таком распределении ресурсов между работами, которое максимизирует некоторую меру эффективности (например, прибыль) или минимизирует ожидаемые затраты (например, издержки производства).

В качестве примера подобных задач рассмотрим **задачу о назначениях**. Её можно сформулировать следующим образом.

Имеется n исполнителей и n видов работ, которые нужно выполнить. Задана матрица оценок C_{ij}, характеризующих эффективность выполнения i-м исполнителем и j-й работы. Требуется распределить исполнителей по работам так, чтобы можно было выполнить всю совокупность работ наиболее эффективно. При этом для выполнения каждой работы должен быть назначен только один исполнитель, и каждый исполнитель должен быть задействован только на одной из работ.

Отметим, что для каждой из n работ можно подобрать исполнителя только в том случае, когда любые k исполнителей ($1 \le k \le n$) могут выполнить в совокупности не менее k разных работ. В этом заключается условие разрешимости задачи о назначениях.

В данной задаче искомыми являются переменные x_{ij}, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$. Если i-й исполнитель назначен на выполнение j-й работы, то $x_{ij} = 1$. В противном случае, $x_{ij} = 0$.

С математической точки зрения задача о назначениях относится к задачам линейного программирования. Соответственно, она может быть решена с помощью симплексного метода – универсального метода решения задач линейного программирования. Однако удобнее использовать для этой цели более компактный и гораздо менее трудоёмкий алгоритм Флада.

В некоторых случаях перед применением алгоритма Флада нужно выполнить определенные предварительные действия.

Если число исполнителей не равно числу работ, то в рассмотрение вводят фиктивных исполнителей или фиктивные работы так, чтобы матрица оценок стала квадратной. Оценки C_{ij} для фиктивных исполнителей (или фиктивных работ) принимают равными нулю.

Если задача о назначениях решается на максимум целевой функции, то от исходной матрицы оценок C_{ij} нужно перейти к матрице преобразованных оценок C'_{ij} с помощью формулы

$$C'_{ij} = \max C_{ij} - C_{ij}, \tag{2.1}$$

где $\max C_{ij}$ – наибольший элемент исходной матрицы оценок.

Если задача решается на минимум целевой функции, то исходную матрицу оценок оставляют без изменений.

После этого применяют алгоритм Флада, который предусматривает выполнение следующих действий.

1. В каждой строке матрицы оценок $|C_{ij}|$ находят минимальный элемент и вычитают его из всех элементов данной строки.

2. В полученной матрице в каждом столбце находят минимальный элемент и вычитают его из всех элементов данного столбца.

Целью первых двух этапов является получение, по крайней мере, одного нуля в каждой строке и каждом столбце матрицы оценок.

3. Минимальным числом прямых вертикальных и/или горизонтальных линий вычёркивают все имеющиеся в матрице нули. Если число прямых равно n, то получено оптимальное решение.

4. Если число прямых меньше n, то оптимальное решение не получено. В этом случае среди незачеркнутых элементов матрицы оценок выбирают минимальный элемент, вычитают его из всех незачеркнутых элементов и прибавляют ко всем элементам, зачеркнутым двумя линиями (вертикальной и горизонтальной). Остальные элементы матрицы оставляют без изменения. После этого возвращаются к пункту 3.

Оптимальное решение получают в матрице оценок $|C_{ij}|$. От неё нужно перейти к матрице искомых переменных $|x_{ij}|$, которая имеет такую же размерность (nxn). Элементами матрицы $|x_{ij}|$ являются нули и единицы. Приравниваться единице могут те элементы матрицы $|x_{ij}|$, которым соответствуют нули в матрице $|C_{ij}|$. При этом в каждой строке и каждом столбце сформированной матрицы $|x_{ij}|$ должна быть только одна единица.

В первую очередь единицы следует записывать в те строки (столбцы) матрицы $|x_{ij}|$, которые соответствуют строкам (столбцам) матрицы $|C_{ij}|$, содержащим только один ноль.

Оптимальному решению в матрице $|C_{ij}|$ могут соответствовать несколько матриц $|x_{ij}|$, которые отличаются расположением единиц, но дают одинаковое значение целевой функции. В этом случае имеются несколько разных, но равноценных вариантов распределения исполнителей по работам.

Рассмотрим пример.

Имеется четыре рабочих места и пять кандидатов на эти места, каждый из которых может работать на любом месте. Известна производительность i-го кандидата на j-м рабочем месте C_{ij}. Нужно распределить кандидатов по рабочим местам так, чтобы добиться максимальной суммарной производительности.

Матрица значений C_{ij} приведена ниже. Строки матрицы соответствуют отдельным исполнителям (кандидатам на места), её столбцы – видам работ (рабочим местам в данном случае).

$$|C_{ij}| = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 10 & 3 \\ 8 & 9 & 4 & 8 \\ 4 & 3 & 6 & 5 \\ 5 & 7 & 8 & 4 \\ 6 & 9 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

Поскольку число исполнителей превышает число рабочих мест, сначала необходимо сбалансировать матрицу. Для этого добавляем 5-й столбец из нулей, который будет символизировать пятое фиктивное рабочее место.

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 & 10 & 3 & 0 \\ 8 & 9 & 4 & 8 & 0 \\ 4 & 3 & 6 & 5 & 0 \\ 5 & 7 & 8 & 4 & 0 \\ 6 & 9 & 7 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

Так как данная задача о назначениях решается на максимум целевой функции, то от исходной матрицы оценок C_{ij} нужно перейти к матрице преобразованных оценок C'_{ij}. В нашем случае такой переход осуществляется по формуле $C'_{ij} = 10 – C_{ij}$:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 7 & 10 \\ 2 & 1 & 6 & 2 & 10 \\ 6 & 7 & 4 & 5 & 10 \\ 5 & 3 & 2 & 6 & 10 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 10 \end{vmatrix}$$

После этого для нахождения оптимального решения может быть применён алгоритм Флада. Вычтем из всех элементов каждой строки минимальный элемент этой строки. Из элементов первой строки вычитаем 0, второй – 1, третьей – 4 и т.д.:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 7 & 10 \\ 1 & 0 & 5 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 8 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

В полученной матрице вычтем из всех элементов каждого столбца минимальный элемент этого столбца. Из элементов первого столбца вычитаем 1, второго, третьего и четвёртого – 0, пятого – 6:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

В результате мы получили матрицу, содержащую допустимое решение задачи. Проверяем его на оптимальность, для чего зачёркиваем минимальным числом прямых вертикальных и/или горизонтальных линий все имеющиеся в матрице нули:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Поскольку число прямых, использованных для вычёркивания нулей, меньше *n* = 5, полученное решение не является оптимальным. Чтобы его улучшить, среди незачеркнутых элементов матрицы оценок выбираем минимальный элемент (в данном случае он равен 1), вычитаем его из всех незачеркнутых элементов и прибавляем ко всем элементам, зачеркнутым дважды. После этого проверяем улучшенное решение на оптимальность:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Теперь число прямых, необходимых для зачёркивания всех нулей, равно 5, следовательно, получено оптимальное решение.

Сформируем матрицу искомых переменных

$$|x_{ij}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Таким образом, первого кандидата следует назначить на 3-е рабочее место, второго – на 1-е, четвёртого – на 2-е, пятого – на 4-е. В этом случае суммарная производительность окажется максимальной и составит $Z = \Sigma C_{ij} \cdot x_{ij} = 10 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 7 \cdot 1 + 9 \cdot 1 = 34$. Третьего кандидата, закреплённого за фиктивным рабочим местом, брать на работу нецелесообразно.

2.2. Задачи распределения ресурсов 2-го типа

Задачи распределения ресурсов 2-го типа возникают тогда, когда наличных ресурсов не хватает для выполнения всех возможных работ. В отличие от задач распределения ресурсов 1-го типа, в них задаётся только количество имеющихся ресурсов, а требование обязательного выполнения определённых объёмов работ не выдвигается.

Условия, характерные для задач распределения ресурсов 2-го типа, можно сформулировать следующим образом.

1. Заданы ресурсы, которые могут быть израсходованы.

2. Известен перечень работ, к выполнению которых можно приступить, и их максимальный объём.

3. Известно количество ресурсов, расходуемое на выполнение единицы каждой работы.

4. Имеющихся в наличие ресурсов недостаточно для выполнения всех работ в полном объёме.

Поэтому требуется определить, какие работы и в каком объёме выполнить, а какие не выполнять, чтобы не перерасходовать имеющиеся ресурсы и обеспечить максимум некоторой меры эффективности (например, прибыли).

В качестве примера подобных задач рассмотрим **задачу о распределении капитальных вложений**. Сформулируем её следующим образом.

Инвестор располагает средствами в количестве K единиц. Имеется n объектов возможных капиталовложений, для каждого из которых известна ожидаемая прибыль $f_j(x_j)$, которая будет получена в результате инвестирования той или иной суммы средств x_j, $j = 1, \ldots, n$. Требуется определить, в какие объекты и в каком размере следует инвестировать средства, чтобы получить максимальную суммарную прибыль.

Данная задача может быть решена методом динамического программирования.

1. В этом случае процесс решения задачи разбивается на n этапов в соответствии с числом объектов возможных капиталовложений.

2. Состояние системы перед началом j-го этапа характеризуется одним параметром S – суммой средств, уже инвестированных в объекты с 1-го по j – 1-й.

3. Варианты управлений на j-м этапе определяются допустимыми объёмами инвестиций в j-й объект x_j, $j = 1, \ldots, n$.

4. Функциональное уравнение задачи выглядит следующим образом:

уравнение для n-го этапа

$$d_n(S) = \max_{0 \le x_n \le K - S} f_n(x_n)\,,\ 0 \le S \le K;$$

уравнение для j-го этапа ($j = n - 1, \ldots, 1$)

$$d_j(S) = \max_{0 \le x_j \le K - S} \{f_j(x_j) + d_{j+1}(S + x_j)\},\ 0 \le S \le K,$$

где $d_j(S)$ – максимальная прибыль, которая может быть получена в результате инвестирования средств в объекты $j, \ldots, n$, если в объекты $1, \ldots, j - 1$ уже инвестировано S единиц средств.

Рассмотрим числовой пример.

Руководство фирмы решает вопрос о наращивании мощностей на трех принадлежащих фирме предприятиях. На реконструкцию предприятий предполагается израсходовать 4 млрд. руб. Каждое предприятие представило на рассмотрение проекты реконструкции, которые характеризуются величинами суммарных затрат x_j и прибыли $f_j(x_j)$. Первое предприятие обязательно должно быть реконструировано, для второго и третьего предприятий дополнительно рассматривается вариант отказа от реконструкции. Соответствующие данные представлены в табл. 1.2. Требуется определить, в какие предприятия и в каком объёме следует инвестировать средства, чтобы получить максимальную суммарную прибыль.

Таблица 1.2

Проект	Предприятие 1		Предприятие 2		Предприятие 3	
	x_1	$f_1(x_1)$	x_2	$f_2(x_2)$	x_3	$f_3(x_3)$
1	2,0	0,4	0	0	0	0
2	3,0	0,5	1,0	0,2	1,0	0,1
3	–	–	2,0	0,3	2,0	0,4

Процесс решения задачи разделяем на три этапа и производим условную оптимизацию. Начинаем с последнего этапа, на котором рассматриваем варианты инвестирования средств в третье предприятие.

3-й этап

Поскольку 4 млрд. руб. должны быть полностью израсходованы, а в третье предприятие можно инвестировать 0, 1 или 2 млрд. руб., достаточно рассмотреть три состояния, в которых может оказаться система перед началом 3-го этапа: S = 2, 3 или 4 (в первое и второе предприятия уже инвестировано 2, 3 или 4 млрд. руб.). Для каждого из этих состояний решаем функциональное уравнение.

Если S ед. средств уже израсходованы на первое и второе предприятия, то для получения максимальной прибыли на 3-м этапе оставшиеся $K - S$ ед. средств следует полностью инвестировать в третье предприятие.

Для состояния $S = 2$ условно-оптимальное управление заключается в том, чтобы инвестировать в третье предприятие оставшиеся 2 млрд. руб. ($x_3 = 2$). Это позволит получить прибыль в размере 0,4 млрд. руб.: $d_3(2) = f_3(2) = 0{,}4$.

Для состояния $S = 3$ условно-оптимальное управление состоит в том, чтобы инвестировать в третье предприятие 1 млрд. руб. ($x_3 = 1$): $d_3(3) = f_3(1) = 0{,}1$.

Для состояния $S = 4$ условно-оптимальное (и единственно возможное) управление заключается в том, чтобы ничего не инвестировать в третье предприятие ($x_3 = 0$): $d_3(4) = f_3(0) = 0$.

2-й этап

Поскольку в первое предприятие можно инвестировать 2 или 3 млрд. руб., к началу 2-го этапа система может оказаться в одном из двух состояний: S = 2 или 3. Для каждого из этих состояний решаем функциональное уравнение.

Для состояния S = 2 существует три допустимых управления: инвестировать во второе предприятие 0, 1 или 2 млрд. руб. Среди них нужно выбрать наилучшее управление, которому соответствует максимальная прибыль за два этапа, 2-й и 3-й:

$$d_2(2) = \max_{x_2 = 0;\,1;\,2} \left\{ \begin{array}{c} f_2(0) + d_3(2+0) = 0 + 0{,}4 = 0{,}4 \\ f_2(1) + d_3(2+1) = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3 \\ f_2(2) + d_3(2+2) = 0{,}3 + 0 = 0{,}3 \end{array} \right\} = 0{,}4.$$

Таким образом, для состояния S = 2 условно-оптимальное управление заключается в том, чтобы ничего не инвестировать во второе предприятие ($x_2 = 0$). Это позволит за два последних этапа получить прибыль в размере 0,4 млрд. руб.

Для состояния S = 3 существует два допустимых управления: инвестировать во второе предприятие 0 или 1 млрд. руб. Сравним их:

$$d_2(3) = \max_{x_2 = 0;\,1} \left\{ \begin{array}{c} f_2(0) + d_3(3+0) = 0 + 0{,}1 = 0{,}1 \\ f_2(1) + d_3(3+1) = 0{,}2 + 0 = 0{,}2 \end{array} \right\} = 0{,}2.$$

Следовательно, для состояния S = 3 условно-оптимальное управление заключается в том, чтобы инвестировать во второе предприятие 1 млрд. руб. ($x_2 = 1$). Это позволит за два последних этапа получить прибыль в размере 0,2 млрд. руб.

1-й этап

Перед началом 1-го этапа система находится в состоянии S = 0 (ничего не израсходовано). Для него существует два допустимых управления: инвестировать в первое предприятие 2 или 3 млрд. руб. Решим функциональное уравнение:

$$d_1(0) = \max_{x_1 = 2;\,3} \left\{ \begin{array}{c} f_1(2) + d_2(0+2) = 0{,}4 + 0{,}4 = 0{,}8 \\ f_1(3) + d_2(0+3) = 0{,}5 + 0{,}2 = 0{,}7 \end{array} \right\} = 0{,}8.$$

Таким образом, выгоднее инвестировать в первое предприятие 2 млрд. руб. Это позволит за три этапа получить прибыль в размере 0,8 млрд. руб.

В заключение определяем оптимальную стратегию. Как было выяснено на 1-м этапе, в первое предприятие следует инвестировать 2 млрд. руб. Следовательно, к началу 2-го этапа система окажется в состоянии $S = 2$ (израсходовано 2 млрд. руб.).

Оптимальное управление для этого состояния, как было определено на 2-м этапе, заключается в том, чтобы ничего не инвестировать во второе предприятие. Таким образом, к началу 3-го этапа система останется в состоянии $S = 2$. Оптимальное управление для этого состояния на 3-м этапе состоит в том, чтобы инвестировать в третье предприятие 2 млрд. руб.

Запишем ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$; при таком распределении инвестиций ожидаемая суммарная прибыль окажется максимальной и составит 0,8 млрд. руб.

2.3. Задачи распределения ресурсов 3-го типа

Задачи распределения ресурсов 3-го типа возникают тогда, когда имеется возможность регулировать количество ресурсов, т.е. определять, какие ресурсы и в каком количестве потребуются, а от каких ресурсов целесообразно отказаться. В этом заключается основное отличие данных задач от задач распределения ресурсов 1-го и 2-го типов, в которых количество ресурсов, которое можно израсходовать, является строго заданным.

Задачи распределения ресурсов 3-го типа характеризуются следующими условиями.

1. Задан перечень работ, которые должны быть выполнены, и их объем.

2. Существуют различные варианты выполнения этих работ.

3. Эти варианты отличаются один от другого количеством затрачиваемых ресурсов.

Требуется выбрать такой вариант выполнения заданных работ, который позволит минимизировать затраты на их выполнение, и определить соответствующую потребность в ресурсах.

В качестве примера рассмотрим **задачу календарного планирования трудовых ресурсов**. Её можно сформулировать следующим образом.

Работодателю нужно составить план регулирования численности рабочих на ближайшие m недель. Численность рабочих регулируется путём найма и увольнения. Первоначальное число рабочих равно x_0. Привлечение дополнительных рабочих связано с затратами в виде накладных расходов по найму $f_1(x_i - x_{i-1})$, где x_i и x_{i-1} – это фактическое число рабочих на i-й и i – 1-й неделях. Увольнение рабочих не требует дополнительных расходов. Объёмы работ для каждой недели известны. Минимальное число рабочих, позволяющее в течение i-й недели выполнить запланированный объем работ, равно b_i (i = 1, ..., m). Если фактическое число рабочих на i-й неделе превышает b_i, то возникают дополнительные затраты, связанные с простоями рабочих на этой неделе $f_2(x_i - b_i)$.

Требуется определить число рабочих для каждой недели так, чтобы суммарные затраты работодателя, связанные с наймом и простоями рабочих, за m недель оказались минимальными.

Для решения данной задачи используем метод динамического программирования.

1. Процесс решения задачи разделяется на m этапов в соответствии с числом недель.

2. Состояние системы перед началом i-го этапа характеризуется одним параметром x_{i-1} – фактическим числом рабочих на i – 1-й неделе.

3. В качестве допустимых управлений на i-м этапе выступают варианты численности рабочих на i-й неделе x_i, i = 1, ..., m.

4. Функциональное уравнение задачи выглядит следующим образом:

уравнение для m-го этапа

$$d_m(x_{m-1}) = f_1(x_m - x_{m-1}),\ \ x_m = b_m,\ b_{m-1} \le x_{m-1} \le \max\{b_{m-1}; b_m\};$$

уравнение для i-го этапа, $i = m - 1, \ldots, 1$

$$d_i(x_{i-1}) = \max_{b_i \le x_i \le \max\{b_i; \ldots; b_m\}} \{ f_1(x_i - x_{i-1}) + f_2(x_i - b_i) + d_{i+1}(x_i)\},$$

$$b_{i-1} \le x_{i-1} \le \max\{b_{i-1}; \ldots; b_m\},$$

где $d_i(x_{i-1})$ – минимально возможная величина затрат работодателя с i-й по последнюю (m-ю) неделю, если число рабочих на i – 1-й неделе равнялось x_{i-1}.

Рассмотрим числовой пример.

Требуется составить план регулирования численности рабочих на следующие 5 недель. К началу рассматриваемого периода времени имеется 6 рабочих ($x_0 = 6$). Минимальные потребности в рабочей силе на i-й неделе ($i = 1, ..., 5$) составляют: $b_1 = 5$, $b_2 = 7$, $b_3 = 8$, $b_4 = 4$, $b_5 = 6$ человек. Затраты, связанные с наймом рабочих, определяются выражением

$$f_1(x_i - x_{i-1}) = \begin{cases} 40 + 20\cdot(x_i - x_{i-1}), \text{ если } x_i \geq x_{i-1} \\ 0, \text{ если } x_i \leq x_{i-1}. \end{cases}$$

Затраты, связанные с простоями рабочих, заданы функцией

$$f_2(x_i - b_i) = 30\cdot(x_i - b_i).$$

Процесс решения задачи разделяем на 5 этапов и производим условную оптимизацию. Начинаем с последнего этапа, на котором рассматриваем варианты численности рабочих на 5-й неделе.

5-й этап

К началу 5-го этапа система может оказаться в одном из трех состояний ($b_4 \leq x_4 \leq \max\{b_4; b_5\}$) : $x_4 = 4$, 5 или 6 (численность рабочих на 4-й неделе составляла 4, 5 или 6 человек).

Для любого из перечисленных состояний системы условно-оптимальное управление состоит в том, чтобы к началу 5-й недели довести численность рабочих до 6 человек, так как $b_5 \leq x_5 \leq b_5$. Запишем соответствующие функциональные уравнения:

$$d_5(4) = f_1(x_5 - x_4) = f_1(6 - 4) = 80;$$
$$d_5(5) = f_1(x_5 - x_4) = f_1(6 - 5) = 60;$$
$$d_5(6) = f_1(x_5 - x_4) = f_1(6 - 6) = 0.$$

На последнем этапе имеют место только затраты, связанные с наймом рабочих, поскольку простои рабочих исключены ($x_5 = b_5$). Таким образом, если на 4-й неделе имеется 4, 5 или 6 рабочих, то затраты работодателя на 5-й неделе составят, соответственно, 80, 60 или 0 тыс. руб.

4-й этап

К началу 4-го этапа система окажется в состоянии $x_3 = 8$ (численность рабочих на 3-й неделе составляла 8 человек), так как

$b_3 \le x_3 \le \max\{b_3;\, b_4;\, b_5\}$. Для этого состояния существует три допустимых управления: x_4 = 4, 5 или 6 (уменьшить численность рабочих к началу 4-й недели до 4, 5 или 6 человек). Среди них нужно выбрать условно-оптимальное управление, которому соответствуют минимальные затраты работодателя за 4-ю и 5-ю недели:

$$d_4(8) = \min_{4 \le x_4 \le 6} \begin{Bmatrix} f_1(4-8) + f_2(4-4) + d_5(4) = 80 \\ f_1(5-8) + f_2(5-4) + d_5(5) = 90 \\ f_1(6-8) + f_2(6-4) + d_5(6) = 60 \end{Bmatrix} = 60.$$

Таким образом, для состояния x_3 = 8 условно-оптимальное управление заключается в том, чтобы довести численность рабочих к началу 4-й недели до 6 человек, уволив 2 рабочих (x_4 = 6).

3-й этап

К началу 3-го этапа система может оказаться в одном из двух состояний: x_2 = 7 или 8 (численность рабочих на 2-й неделе составляла 7 или 8 человек), так как $b_2 \le x_2 \le \max\{b_2;\, b_3;\, b_4;\, b_5\}$.

Для каждого из этих состояний существует только одно допустимое управление x_3 = 8 (довести численность рабочих к началу 3-й недели до 8 человек). Запишем соответствующие функциональные уравнения

$$d_3(7) = f_1(8-7) + f_2(8-8) + d_4(8) = 120;$$
$$d_3(8) = f_1(8-8) + f_2(8-8) + d_4(8) = 60.$$

2-й этап

К началу 2-го этапа система может оказаться в одном из четырех состояний: x_1 = 5, 6, 7 или 8 (численность рабочих на 1-й неделе составляла 5, 6, 7 или 8 человек), так как $b_1 \le x_1 \le \max\{b_1;\, b_2;\, b_3;\, b_4;\, b_5\}$. Для каждого из этих состояний существуют два допустимых управления: x_2 = 7 или 8 (довести численность рабочих к началу 2-й недели до 7 или 8 человек). Запишем соответствующие функциональные уравнения

$$d_2(5) = \min_{7 \le x_2 \le 8} \begin{Bmatrix} f_1(7-5) + f_2(7-7) + d_3(7) = 200 \\ f_1(8-5) + f_2(8-7) + d_3(8) = 190 \end{Bmatrix} = 190;$$

$$d_2(6) = \min_{7 \le x_2 \le 8} \begin{Bmatrix} f_1(7-6) + f_2(7-7) + d_3(7) = 180 \\ f_1(8-6) + f_2(8-7) + d_3(8) = 170 \end{Bmatrix} = 170.$$

Следовательно, для состояний $x_1 = 5$ и $x_1 = 6$ условно-оптимальное управление заключается в том, чтобы к началу 2-й недели довести численность рабочих до 8 человек ($x_2 = 8$), для чего потребуется нанять, соответственно, 3 и 2 рабочих.

$$d_2(7) = \min_{7 \le x_2 \le 8} \begin{Bmatrix} f_1(7-7) + f_2(7-7) + d_3(7) = 120 \\ f_1(8-7) + f_2(8-7) + d_3(8) = 150 \end{Bmatrix} = 120;$$

$$d_2(8) = \min_{7 \le x_2 \le 8} \begin{Bmatrix} f_1(7-8) + f_2(7-7) + d_3(7) = 120 \\ f_1(8-8) + f_2(8-7) + d_3(8) = 90 \end{Bmatrix} = 90.$$

Таким образом, для состояний $x_1 = 7$ и $x_1 = 8$ условно-оптимальное управление заключается в том, чтобы к началу 2-й недели оставить численность рабочих без изменения ($x_2 = 7$ или 8).

1-й этап

Перед началом 1-го этапа система находится в состоянии $x_0 = 6$ (имеется 6 рабочих). Для него существуют четыре допустимых управления: $x_1 = 5$, 6, 7 или 8 (довести численность рабочих к началу 1-й недели до 5, 6, 7 или 8 человек). Решим соответствующее функциональное уравнение

$$d_1(6) = \min_{5 \le x_1 \le 8} \begin{Bmatrix} f_1(5-6) + f_2(5-5) + d_2(5) = 190 \\ f_1(6-6) + f_2(6-5) + d_2(6) = 200 \\ f_1(7-6) + f_2(7-5) + d_2(7) = 240 \\ f_1(8-6) + f_2(8-5) + d_2(8) = 260 \end{Bmatrix} = 190.$$

Таким образом, для начального состояния системы наилучшее управление заключается в том, чтобы к началу 1-й недели уменьшить численность рабочих до 5 чел. ($x_1 = 5$), для чего потребуется уволить одного рабочего. В этом случае затраты работодателя за 5 недель составят 190 тыс. руб.

В заключение определяем оптимальную стратегию. Как было выяснено на 1-м этапе, к началу 1-й недели численность рабочих следует довести до 5 чел. Следовательно, к началу 2-го этапа система окажется в состоянии $x_1 = 5$. Оптимальное управление для этого состояния, как было определено на 2-м этапе, заключается в том, чтобы к началу 2-й недели увеличить численность рабочих до 8 чел. Таким образом, к началу 3-го этапа система окажется в состоянии $x_2 = 8$. Оптимальное управление для этого состояния на 3-м этапе состоит в том, чтобы в начале 3-й недели оставить численность рабочих без изменения. Следовательно, к началу 4-го этапа система останется в состоянии x_3 = 8. Оптимальное управление для этого состояния на 4-м этапе заключается в том, чтобы к началу 4-й недели уменьшить численность рабочих до 6 чел. Следовательно, к началу 5-го этапа система окажется в состоянии x_4 = 6. Оптимальное управление для этого состояния на 5-м этапе состоит в том, чтобы в начале 5-й недели оставить численность рабочих без изменения. Запишем ответ: x_1 = = 5, x_2 = 8, x_3 = 8, x_4 = 6, x_5 = 6 чел. В этом случае затраты работодателя за 5 недель окажутся минимальными и составят 190 тыс. руб.

3. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УПОРЯДОЧИВАНИЯ

Задача упорядочивания посвящена оптимизации очерёдности выполнения тех или иных работ. Её можно сформулировать следующим образом.

Имеется *n* объектов, на каждом из которых нужно выполнить одни и те же работы (не менее двух) в одном и том же порядке. Для выполнения каждого вида работ используется определенный исполнитель, который по мере завершения работ переходит с одного объекта на другой. Очередной вид работ на объекте может быть начат лишь после завершения предыдущего вида работ.

Требуется установить такую очередность обслуживания объектов, чтобы общее время выполнения всех работ на всех объектах было минимальным, или, что то же самое, общее время простоя исполнителей было минимальным.

Следует подчеркнуть, что на каждом объекте должно выполняться не менее двух работ. Если на каждом объекте нужно выполнить только одну работу, то задача упорядочивания отсутствует. В этом случае при любой очередности обслуживания объектов общее время обслуживания останется неизменным.

Для *n* объектов существует *n*! различных вариантов очередности их обслуживания.

Для определения оптимальной очередности обслуживания объектов, на каждом из которых нужно выполнить две работы, используют алгоритм Джонсона. В этом случае исходные данные задачи представляют в таблице, состоящей из трёх столбцов.

Объект	Время выполнения	
	первой работы	второй работы
1	2	3

Алгоритм Джонсона предусматривает выполнение следующих действий.

1. Среди элементов 2-го и 3-го столбцов таблицы выбирают минимальный элемент.

2. Если это время выполнения 1-й работы, то соответствующий объект следует обслужить первым из оставшихся в рассмотрении объектов. Если это время выполнения 2-й работы, то соответствующий объект следует обслужить последним из оставшихся.

3. Строка, соответствующая рассмотренному объекту, вычеркивается из таблицы. Если в таблице остались незачеркнутые строки, то возвращаются к пункту 1. В противном случае решение задачи закончено.

Алгоритм Джонсона можно использовать и для определения оптимальной очерёдности обслуживания объектов, на каждом из которых нужно произвести три работы, если выполняется хотя бы одно из следующих условий: 1) $\min t_{1i} \geq \max t_{2i}$; 2) $\min t_{3i} \geq \max t_{2i}$. Здесь t_{1i}, t_{2i}, t_{3i} – время выполнения соответственно 1-й, 2-й и 3-й работы на i-м объекте.

В этом случае поиск оптимальной очерёдности обслуживания объектов осуществляется по суммам $t_{1i} + t_{2i}$ и $t_{2i} + t_{3i}$, что позволяет использовать аналогичную таблицу из трёх столбцов.

Рассмотрим пример. Нужно изготовить пять разных деталей. Каждая деталь должна быть обработана сначала на станке №1, затем – на станке №2. Соответствующие затраты времени приведены в табл. 3.1.

Требуется установить такую очередность обработки деталей, чтобы затраты времени на изготовление всех деталей оказались минимальными.

Таблица 3.1

Деталь	Время обработки детали (мин)	
	на станке №1	на станке №2
a	7	5
b	4	2
c	6	8
d	1	5
e	3	4

Среди величин 2-го и 3-го столбцов таблицы минимальной является 1. Это время обработки детали *d* на станке №1, следовательно, эту деталь нужно изготовить первой. Четвертая строка таблицы исключается из дальнейшего рассмотрения.

Среди оставшихся величин минимальной является 2. Это время обработки детали *b* на станке №2, следовательно, деталь *b* должна быть изготовлена последней. Вторая строка таблицы исключается из рассмотрения.

Среди оставшихся величин минимальной является 3. Это время обработки детали *e* на станке №1, следовательно, эту деталь нужно изготовить первой из оставшихся в рассмотрении. Другими словами, деталь *e* занимает первое место из трёх оставшихся в очереди (2, 3 и 4), т.е. место 2. Пятая строка таблицы исключается из дальнейшего рассмотрения.

Среди оставшихся величин минимальной является 5. Это время обработки детали *a* на станке №2, следовательно, она должна быть изготовлена последней из оставшихся в рассмотрении. Поэтому помещаем деталь *a* на четвертое место.

Оставшееся место в очереди занимает последняя деталь *c*.

Очерёдность изготовления	1	2	3	4	5
Деталь	*d*	*e*	*c*	*a*	*b*

Установленная очерёдность изготовления деталей позволяет минимизировать затраты времени на выполнение всех работ *T*. Величину *T* можно определить с помощью линейной диаграммы. В данном случае она составляет 25 мин.

Наиболее распространённый подкласс задач упорядочивания составляют **задачи сетевого планирования и управления** (СПУ).

Задача СПУ возникает при планировании комплекса взаимосвязанных работ, например, строительных работ, опытно-конструкторских разработок. Её можно сформулировать следующим образом.

Необходимо выполнить комплекс взаимосвязанных работ. Установлена очерёдность их выполнения, т.е. для каждой работы комплекса известны предшествующие и следующие непосредственно за ней работы. Дана ожидаемая продолжительность выполнения каждой из работ. Имеются данные о наличии материально-технических или трудовых ресурсов.

Требуется составить календарный план, т.е. определить моменты начала и окончания каждой работы так, чтобы затраты на выполнение всего комплекса работ или продолжительность его осуществления оказались минимальными.

Для описания и решения задач СПУ строят специальную графическую модель – сетевой график. Сетевой график позволяет отразить технологические, организационные и логические взаимосвязи рассматриваемого комплекса работ. Методы расчёта временных параметров сетевого графика изложены в [2].

4. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

Создание запасов (сырья, материалов, полуфабрикатов, топлива, запчастей) необходимо для обеспечения непрерывного функционирования практически любого производства. Видимо, поэтому задача управления запасами является исторически одной из первых задач исследования операций. Она заключается в определении оптимального уровня запасов, необходимых для удовлетворения спроса потребителей в течение заданного периода времени.

С задачами управления запасами чаще всего приходится сталкиваться при планировании материально-технического обеспечения предприятий. В них требуется определить: а) какое количество продукции заказывать (размер заказа); б) когда заказывать (периодичность заказов).

Размер и периодичность заказов определяются из условия минимизации суммарных затрат на управление запасами. В их состав могут включаться:

1) затраты на приобретение ресурсов (закупочная цена). Эти затраты должны учитываться, если цена единицы ресурса зависит от его закупаемого количества. Например, при наличии оптовых скидок, когда цена единицы ресурса убывает с возрастанием размера закупаемой партии;

2) затраты на оформление заказа. Это расходы, связанные с размещением заказа на ресурсы. Они зависят не от размера заказа, а от количества заказов. При большом размере заказа эти затраты снижаются, при малом – возрастают, так как заказы приходится размещать чаще;

3) затраты на хранение запасов. Представляют собой расходы на содержание запасов на складе. Включают в себя складские расходы, потери, связанные со старением и порчей запасов, страховые расходы и т.п. Эти затраты возрастают с увеличением размера заказа (и, соответственно, объёма запасов на складе);

4) потери от дефицита. К ним относятся затраты, обусловленные отсутствием запаса необходимых ресурсов или готовой продукции. В качестве примера можно привести убытки в связи с потерей потребителей или ухудшением репутации поставщика. С ростом размера заказа вероятность возникновения дефицита уменьшается, что приводит к снижению данных потерь.

В задачах управления запасами не обязательно должны учитываться все перечисленные виды затрат. В ряде случаев те или иные виды затрат оказываются несущественными и исключаются из рассмотрения.

В качестве управляемых переменных в задачах управления запасами выступают сроки и размеры заказов. Для определения величины размера заказа и периодичности заказов используют те или иные математические модели.

К настоящему времени разработано большое количество математических моделей управления запасами. Разнообразие моделей этого класса определяется различными предположениями о характере спроса, для удовлетворения которого создаются запасы. В зависимости от сделанных допущений спрос может считаться детерминированным или вероятностным.

Детерминированный спрос может быть статическим (когда интенсивность спроса остается неизменной во времени) или динамическим (спрос изменяется с течением времени).

Вероятностный спрос может быть стационарным (когда функция плотности вероятности спроса неизменна во времени) и нестационарным (когда функция плотности вероятности спроса изменяется во времени).

Модели, построенные исходя из предположения о детерминированном статическом спросе, являются наименее точными и наиболее простыми с математической точки зрения. Вероятностные нестационарные модели, наоборот, являются наиболее точными и весьма сложными.

Рассмотрим в качестве примера **задачу календарного планирования производства**, представляющую собой модель с детерминированным динамическим спросом. Сформулируем её следующим образом.

Планируется деятельность производственного предприятия на ближайшие n недель. Известно, что спрос на продукцию предприятия на i-й неделе будет составлять b_i единиц. При работе в одну смену в течение i-й недели предприятие может произвести a_i^I единиц продукции. В случае необходимости может быть организована работа в две смены. При работе во вторую смену в течение i-й недели предприятие может дополнительно выпустить a_i^{II} единиц продукции. Затраты на изготовление единицы продукции на i-й неделе в первую смену равны S_i^I, во вторую смену – S_i^{II}, причём $S_i^I < S_i^{II}$. Затраты на хранение единицы продукции на складе в течение i-й недели равны h_i.

Требуется составить календарный план производства на n недель так, чтобы спрос потребителей был удовлетворен при минимальных затратах предприятия на изготовление и хранение продукции.

При описании данной задачи удобно использовать два счетчика времени (i и j), один из которых применяется для нумерации периодов производства продукции, а другой – периодов её хранения и реализации.

Если дефицит продукции предприятия не допускается, то математическую модель задачи можно записать в следующем виде:

найти минимальное значение целевой функции

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} (C_{ij}^{I} X_{ij}^{I} + C_{ij}^{II} X_{ij}^{II})$$

при ограничениях:

1) объём выпущенной на i-й неделе в первую или вторую смену продукции не может превышать мощность предприятия a_i:

$$\sum_{j=i}^{n} X_{ij}^{I} \le a_i^{I}, \ \sum_{j=i}^{n} X_{ij}^{II} \le a_i^{II}, \ i = \overline{1,n};$$

2) спрос потребителей на j-й неделе b_j может быть удовлетворен за счёт продукции, выпущенной с 1-й по j-ю неделю в первую и вторую смену:

$$\sum_{i=1}^{j} (X_{ij}^{I} + X_{ij}^{II}) = b_j, \ j = \overline{1,n};$$

3) искомые объёмы реализации продукции должны быть неотрицательными величинами:

$$X_{ij}^{I} \ge 0, \ X_{ij}^{II} \ge 0, \ i = \overline{1,n}, \ j = \overline{i,n},$$

где C_{ij} – сумма затрат на выпуск и хранение единицы продукции, изготовленной на i-й (в первую или вторую смену) и реализованной на j-й неделе; X_{ij} – объём продукции, изготовленный на i-й неделе в первую или вторую смену и реализованный на j-й неделе.

Матрица затрат, используемая для решения задачи, приведена ниже.

Продукцию, изготовленную на i-й неделе, нельзя использовать для удовлетворения спроса предыдущих недель, так как её дефицит не допускается. В матрице это ограничение отображается путём блокирования соответствующих клеток (они заштрихованы).

Дополнительный n + 1-й столбец вводят для балансировки задачи. Спрос фиктивной недели находят как разность

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{n}(a_i^I + a_i^{II}) - \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

i \ j	1	2	…	n	$n + 1$	Выпуск на i-й неделе
1	S_1^I	$S_1^I + h_1$	…	$S_1^I + h_1 + \ldots + h_{n-1}$	0	a_1^I
	S_1^{II}	$S_1^{II} + h_1$	…	$S_1^{II} + h_1 + \ldots + h_{n-1}$	0	a_1^{II}
2		S_2^I	…	$S_2^I + h_2 + \ldots + h_{n-1}$	0	a_2^I
		S_2^{II}	…	$S_2^{II} + h_2 + \ldots + h_{n-1}$	0	a_2^{II}
3			…	$S_3^I + h_3 + \ldots + h_{n-1}$	0	a_3^I
			…	$S_3^{II} + h_3 + \ldots + h_{n-1}$	0	a_3^{II}
…	…	…	…	…	…	…
n			…	S_n^I	0	a_n^I
			…	S_n^{II}	0	a_n^{II}
Спрос на j-й неделе	b_1	b_2	…	b_n	b_{n+1}	

Алгоритм решения бездефицитной модели предельно прост.

1. Сначала путем последовательного назначения максимально возможных поставок в наиболее дешёвые клетки 1-го столбца матрицы удовлетворяется спрос на первой неделе. Затем корректируются объёмы выпуска продукции на первой неделе a_1^I и a_1^{II}: $a_1^I - X_{11}^I$, $a_1^{II} - X_{11}^{II}$.

2. Далее рассматривается 2-й столбец, где спрос b_2 удовлетворяется наиболее дешёвыми поставками с учётом изменившихся объёмов выпуска. После этого корректируются значения a_2^I и a_2^{II}: $a_2^I - X_{22}^I$, $a_2^{II} - X_{22}^{II}$. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет удовлетворен спрос на n-й неделе. В заключение заполняется фиктивный n + 1-й столбец. В него попадает избыточный объём продукции, который в действительности не следует изготавливать.

В другом случае возникновение дефицита продукции допускается, но выдвигается условие, что весь задолженный спрос должен быть удовлетворен к концу последнего этапа.

Тогда математическая модель задачи записывается в следующем виде.

Найти

$$\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\text{З}_{ij}^I X_{ij}^I + \text{З}_{ij}^{II} X_{ij}^{II})$$

при ограничениях:

1) $\sum_{j=1}^{n} X_{ij}^{I} \le a_i^{I},\ \sum_{j=1}^{n} X_{ij}^{II} \le a_i^{II},\ i=\overline{1,n};$

2) $\sum_{i=1}^{n} (X_{ij}^{I} + X_{ij}^{II}) = b_j,\ j=\overline{1,n};$

3) $X_{ij}^{I} \ge 0,\ X_{ij}^{II} \ge 0,\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}.$

Здесь $З_{ij}$ – сумма затрат на производство, расходов на хранение и потерь от дефицита в расчёте на единицу продукции, изготовленной на *i*-й неделе (в первую или вторую смену) и использованной для покрытия спроса на *j*-й неделе.

Матрица затрат $З_{ij}$, используемая для решения этой задачи, выглядит следующим образом. Здесь p_j – потери от дефицита (отсутствия) единицы готовой продукции на *j*-й неделе.

i \ *j*	1	2	…	*n*	*n* + 1	Выпуск
1	S_1^{I}	$S_1^{I} + h_1$	…	$S_1^{I} + h_1 + \ldots + h_{n-1}$	0	a_1^{I}
	S_1^{II}	$S_1^{II} + h_1$	…	$S_1^{II} + h_1 + \ldots + h_{n-1}$	0	a_1^{II}
2	$S_2^{I} + p_1$	S_2^{I}	…	$S_2^{I} + h_2 + \ldots + h_{n-1}$	0	a_2^{I}
	$S_2^{II} + p_1$	S_2^{II}	…	$S_2^{II} + h_2 + \ldots + h_{n-1}$	0	a_2^{II}
3	$S_3^{I} + p_1 + p_2$	$S_3^{I} + p_2$	…	$S_3^{I} + h_3 + \ldots + h_{n-1}$	0	a_3^{I}
	$S_3^{II} + p_1 + p_2$	$S_3^{II} + p_2$	…	$S_3^{II} + h_3 + \ldots + h_{n-1}$	0	a_3^{II}
…	…	…	…	…	…	…
n	$S_n^{I} + p_1 + \ldots + p_{n-1}$	$S_n^{I} + p_2 + \ldots + p_{n-1}$	…	S_n^{I}	0	a_n^{I}
	$S_n^{II} + p_1 + \ldots + p_{n-1}$	$S_n^{II} + p_2 + \ldots + p_{n-1}$	…	S_n^{II}	0	a_n^{II}
Спрос	b_1	b_2	…	b_n	b_{n+1}	

Для получения оптимального решения в данном случае нужно использовать один из методов решения **транспортной задачи**, например, метод потенциалов [3].

5. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВЫБОРА МАРШРУТА

Задачи выбора маршрута довольно неоднородны. Они могут быть связаны с оптимизацией конфигурации проектируемой сети коммуникаций или маршрута движения по существующей транспортной сети, оценкой пропускной способности коммунальных или транспортных сетей, определением кратчайших расстояний между некоторыми или всеми парами пунктов сети и т.д. Простейшая задача выбора маршрута посвящена поиску пути, который позволяет попасть из пункта А в пункт Б с минимальными затратами времени или средств.

Чаще всего с задачами выбора маршрута приходится сталкиваться при анализе процессов на транспорте и в системах связи.

В качестве примера подобных задач рассмотрим **задачу о покрытии**, посвящённую построению кратчайшей связывающей сети. Её можно сформулировать следующим образом.

Планируется создание сети коммуникаций для обслуживания нескольких (n) населенных пунктов (районов города, домов). В качестве коммуникаций могут выступать трубопроводы, линии электропередач, кабельные сети и т.п. Известны затраты C_{ij} на прокладку коммуникаций между различными пунктами i и j. Если соединение каких-то пунктов коммуникациями требует слишком больших затрат либо технически невозможно, величину C_{ij} приравнивают ∞.

Требуется определить, какие пункты следует связать линиями коммуникаций, чтобы все пункты могли быть подключены к коммуникационной сети при минимальных затратах на её строительство.

Существует n^{n-2} допустимых вариантов решения данной задачи. Избежать перебора столь значительного количества вариантов и быстро построить кратчайшую связывающую сеть для заданного множества пунктов позволяет следующий алгоритм.

1. Задано множество населённых пунктов. Можно начать процесс решения задачи с любого пункта и соединить его отрезком с ближайшим пунктом сети. Два соединенных пункта образуют связное множество, а остальные пункты – несвязное множество.

2. В несвязном множестве выбрать пункт, который ближе всех расположен по отношению к одному из пунктов связного множества, и соединить эти два пункта отрезком. В случае наличия одинаково удаленных пунктов выбирается любой из них. Затем корректируют связное и несвязное множества. Действия, предусмотренные пунктом 2, повторяют до тех пор, пока в связное множество не попадут все пункты сети.

Рассмотрим числовой пример.

Телевизионная компания планирует создание кабельной сети для обслуживания пяти районов города. Затраты C_{ij} на прокладку кабеля между различными районами известны, причем $C_{ij} = C_{ji}$. Требуется определить, какие районы связать кабелем, чтобы минимизировать затраты на подключение (прямое или через другие районы) всех районов к телецентру. Матрица затрат приведена ниже.

Матрица C_{ij}, млн. руб.

1	–	1	5	7	9	∞
2		–	6	4	3	∞
3			–	6	∞	10
4				–	8	3
5					–	∞
6						–
Пункты	1	2	3	4	5	6

Построим сетевую модель задачи. Первоначально она состоит из шести вершин, одна из которых изображает телецентр, остальные – районы.

Начать расчёты можно с любой вершины, так как независимо от этого в результате всегда будет получено одно и то же оптимальное решение. Начнем, например, с вершины 1, символизирующей телецентр. Соединим её отрезком с «ближайшей» вершиной сети, 2-й (поскольку этой паре вершин соответствует минимальное значение C_{ij}: $\min C_{ij} = C_{12}$). Остальные вершины (3, 4, 5, 6) образуют множество несвязных вершин. Последующие этапы расчётов приведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Этап расчётов	Множество связных вершин	Множество несвязных вершин	Участок сети, добавленный на этапе
1	$V = \{1, 2\}$	$\tilde{V} = \{3, 4, 5, 6\}$	1–2
2	$V = \{1, 2, 5\}$	$\tilde{V} = \{3, 4, 6\}$	2–5
3	$V = \{1, 2, 5, 4\}$	$\tilde{V} = \{3, 6\}$	2–4
4	$V = \{1, 2, 5, 4, 6\}$	$\tilde{V} = \{3\}$	4–6
5	$V = \{1, 2, 5, 4, 6, 3\}$	$\tilde{V} = \varnothing$	1–3

Решение задачи заканчивается, когда множество несвязных вершин оказывается пустым. Полученная сеть представлена на рис. 5.1.

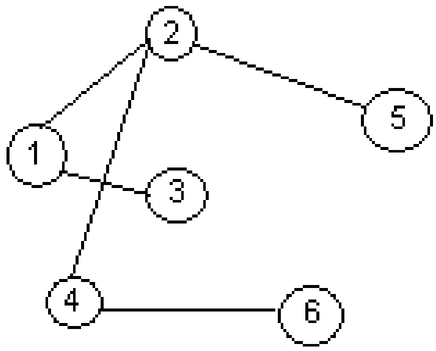

Рис. 5.1. Оптимальное начертание кабельной сети

Таким образом, минимальные возможные затраты на создание кабельной сети равны $Z = C_{12} + C_{13} + C_{24} + C_{25} + C_{46} = 1 + 3 + 4 + 3 + 5 = 16$ млн. руб.

6. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

В задачах массового обслуживания (МО) рассматривается функционирование систем, предназначенных для обслуживания заявок, поступающих в случайные моменты времени (например, автомашин, подъезжающих к регулируемому перекрёстку). Каждая система массового обслуживания (СМО) состоит из определенного количества средств обслуживания, которые называют каналами обслуживания. Оптимизации подлежат параметры СМО: количество каналов обслуживания, время обслуживания заявки и т.д.

Задачи МО являются задачами принятия решений в условиях неопределённости. Неопределённые факторы, рассматриваемые в задачах МО, представляют собой случайные величины (или случайные функции), вероятностные характеристики которых либо известны, либо могут быть получены из опыта. Поэтому для исследования СМО широко используют аппарат теории случайных процессов.

СМО делятся на классы по ряду признаков. В зависимости от допустимости очереди различают: СМО с отказами; СМО с ожиданием; СМО смешанного типа.

В СМО с отказами заявка, поступившая в момент, когда все каналы обслуживания заняты, получает отказ и покидает СМО. Если в момент поступления заявки хотя бы один из каналов свободен, она принимается на обслуживание (например, АТС).

В СМО с ожиданием заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, становится в очередь и дожидается обслуживания (например, АЗС). На практике чаще всего приходится сталкиваться именно с ними. Недаром теория МО имеет и второе название – теория очередей.

В СМО смешанного типа также допускается образование очереди, но ограниченной (например, кассы магазина). В зависимости от характера ограничений, накладываемых на процесс ожидания обслуживания, различают: системы с ограничением времени ожидания заявки в очереди; системы с ограничением времени пребывания заявки в СМО; системы с ограничением на длину очереди.

Различают замкнутые и открытые СМО. Замкнутой называют систему, в которой поток заявок ограничен. В таких системах циркулирует постоянное количество объектов, периодически требующих обслуживания (например, обслуживание станков в цехе). Открытой называется система с неограниченным источником заявок (например, автомобильная дорога).

В зависимости от количества каналов обслуживания различают одноканальные и многоканальные СМО.

Процесс работы СМО представляет собой случайный процесс. Это означает, что в процессе работы СМО меняет свое состояние, причем заранее неизвестным, случайным образом. Состояние СМО характеризуется количеством заявок, находящихся в системе.

Переходы СМО из одного состояния в другое происходит под действием потоков событий. Потоком событий называется последовательность однородных событий, которые следуют одно за другим в случайные моменты времени. Различают потоки заявок и потоки обслуживаний. Под потоком обслуживаний понимается поток заявок, обслуженных одним непрерывно занятым каналом.

Важной характеристикой потока событий является его интенсивность – среднее количество событий, происходящих в единицу времени. Интенсивность потока заявок обычно обозначают буквой λ, интенсивность потока обслуживаний – буквой $\mu = 1/t_{\text{об}}$, где $t_{\text{об}}$ – среднее время обслуживания одной заявки.

Поток событий называется стационарным, если его вероятностные характеристики неизменны во времени. В частности, интенсивность стационарного потока остаётся постоянной.

Поток событий называется потоком без последействия, если вероятность поступления k заявок после произвольного момента времени не зависит от того, когда и сколько поступило заявок до этого момента. Это означает, что события, образующие поток, появляются независимо одно от другого, вызванные каждое своими собственными причинами (например, поток прибывающих на заправку автомашин или входящих в метро пассажиров).

Поток событий называется ординарным, если события в нём появляются поодиночке, а не группами. Например, поток поездов, подходящих к станции метро в одном направлении, ординарен, а поток вагонов – неординарен.

Поток событий называется простейшим, если он одновременно обладает свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последействия. Для простейшего потока интервал времени t между двумя соседними событиями имеет показательное распределение

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Если все потоки событий, переводящие СМО из одного состояния в другое, являются простейшими, то протекающий в системе случайный процесс называется марковским. Назван он именем русского ученого, академика А.А. Маркова (1856–1922), который внес большой вклад в развитие теории случайных процессов. Соответственно, и СМО можно разделить на марковские (или простейшие) и немарковские.

Если процесс работы СМО является марковским, то для его описания можно построить довольно простую математическую модель, которая позволяет установить аналитическую зависимость показателей эффективности СМО от условий её работы (характера потока заявок, количества каналов, их производительности).

Если процесс работы СМО не является марковским, то его математическое описание значительно усложняется. В этом случае редко удается получить удобные для использования аналитические формулы. Поэтому для расчёта показателей эффективности СМО приходится использовать метод статистических испытаний (его также называют методом Монте-Карло). Это численный метод решения математических задач с помощью моделирования случайных величин. Он предложен американскими математиками Дж. Нейманом и С. Уламом в 1949 г. Кстати, Нейман является также основоположником теории игр.

Сущность метода статистических испытаний состоит в следующем. Тем или иным способом воспроизводят функционирование изучаемой системы с учётом воздействия случайных факторов. После каждого такого воспроизведения (его называют испытанием) регистрируют совокупность выходных параметров. В результате многократного повторения испытаний получают статистический материал, позволяющий выявить устойчивые закономерности функционирования системы. Соответственно, широкое практическое применение метод нашёл только с появлением мощных ЭВМ.

Метод статистических испытаний позволяет исследовать не только СМО, но и любые процессы, на протекание которых влияют случайные факторы. Он широко применяется для решения сложных вычислительных задач (вычисление кратных интегралов и др.) и поиска оптимальных решений в экстремальных задачах.

Ниже приведены аналитические зависимости между показателями эффективности СМО и условиями их работы для ряда простейших (марковских) систем.

6.1. *n*-канальная СМО с отказами

Исходная ситуация: на вход n-канальной СМО поступает поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуживаний имеет интенсивность μ. Если в момент поступления заявки все n каналов заняты, она получает отказ и покидает систему. В противном случае, заявка обслуживается.

Нужно определить показатели эффективности данной СМО: абсолютную пропускную способность A, т.е. среднее количество заявок, обслуживаемых в единицу времени; относительную пропускную способность Q, т.е. вероятность того, что заявка будет обслужена системой; вероятность отказа в обслуживании $p_{\text{отк}}$; среднее число занятых каналов $\overline{n}_{з}$.

Введём в рассмотрение параметр $\alpha = \lambda/\mu$, который представляет собой приведённую плотность входящего потока и равен среднему количеству заявок, поступающих в СМО за среднее время обслуживания одной заявки.

Обозначим через p_k вероятность того, что в СМО находится k заявок: p_0 – 0 заявок, p_1 – 1 заявка и т.д. Для данной системы

$$p_k = \frac{\alpha^k}{k!}\cdot p_0;\ p_0 = \left(1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \ldots + \frac{\alpha^n}{n!}\right)^{-1}.$$

Показатели эффективности этой СМО можно рассчитать по следующим формулам:

1) $p_{\text{отк}} = p_n = \dfrac{\alpha^n}{n!}\cdot p_0$;

2) $Q = 1 - p_{\text{отк}}$;

3) $A = \lambda\cdot Q$;

4) $\overline{n}_{з} = \alpha\cdot Q = \dfrac{A}{\mu}$.

6.2. Одноканальная СМО с ожиданием

Исходная ситуация: на вход одноканальной СМО поступает поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуживаний имеет интенсивность μ. Если в момент поступления заявки канал обслуживания занят, она встает в очередь и дожидается обслуживания. В таких СМО время ожидания ничем не ограничено.

Требуется определить показатели эффективности СМО:

$L_{\text{сист}}$ – среднее число заявок в системе;

$W_{\text{сист}}$ – среднее время пребывания заявки в СМО;

$L_{\text{оч}}$ – среднее число заявок в очереди;

$W_{оч}$ – среднее время пребывания заявки в очереди;

$p_{зан}$ – вероятность того, что канал занят (характеризует степень загрузки канала).

Здесь $p_0 = 1 - \alpha$, следовательно, $p_{зан} = 1 - p_0 = \alpha$. Остальные показатели эффективности можно рассчитать по формулам:

1) $L_{сист} = \dfrac{\alpha}{1-\alpha} = \dfrac{\alpha}{p_0}$;

2) $W_{сист} = \dfrac{\alpha}{\lambda(1-\alpha)} = \dfrac{L_{сист}}{\lambda}$;

3) $L_{оч} = L_{сист} - p_{зан} = \dfrac{\alpha^2}{1-\alpha}$;

4) $W_{оч} = 1 - p_0 = \alpha$.

Чтобы такая система могла функционировать, должно выполняться условие $\alpha < 1$. В противном случае, очередь будет расти до бесконечности.

6.3. *n*-канальная СМО с ожиданием

Для неё

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \ldots + \frac{\alpha^n}{n!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)}\right)^{-1}.$$

Расчёт показателей эффективности СМО производится по следующим формулам:

1) $L_{сист} = L_{оч} + \alpha$;

2) $W_{сист} = \dfrac{L_{систч}}{\lambda}$;

3) $L_{оч} = \dfrac{\alpha^{n+1}}{n \cdot n! \cdot (1-\alpha / n)^2} p_0$;

4) $W_{оч} = \dfrac{L_{оч}}{\lambda}$;

5) $\overline{n}_з = \alpha$.

СМО с неограниченной очередью может нормально функционировать лишь в случаях, когда выполняется условие $\alpha < n$. В противном случае, число заявок в очереди будет постоянно увеличиваться и работа СМО через какое-то время будет «парализована».

6.4. *n*-канальная СМО с ограничением на время ожидания в очереди

Исходная ситуация: на вход СМО, состоящий из n каналов с одинаковой пропускной способностью μ, поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, становится в очередь. Если время ожидания затягивается, заявка покидает систему необслуженной. Время пребывания заявки в очереди $T_{ож}$ есть случайная величина с математическим ожиданием $M[T_{ож}] = m_{tож}$.

Так как в данной СМО допускаются и ожидание в очереди, и отказы в обслуживании, для оценки эффективности её функционирования используют как показатели пропускной способности (как для СМО с отказами), так и показатели, характеризующие процесс ожидания (как для СМО с неограниченной очередью).

Будем считать, что время ожидания заявки в очереди распределено по показательному закону с параметром v, т.е. $F(t) = 1 - e^{-vt}$. Здесь v – интенсивность потока уходов заявки из очереди. Её величина обратно пропорциональна $M[T_{ож}]$: $v = 1/m_{tож}$.

Величина p_0 в данном случае определяется по формуле

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{k!} + \frac{1}{n!}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\alpha^k}{\prod_{l=1}^{k-n}(n + l\cdot\beta)}\right)^{-1}, \text{ где } \beta = \frac{\nu}{\mu}.$$

Значения показателей эффективности этой СМО рассчитываются по формулам:

1) относительная пропускная способность

$$Q = p_{обс} = \frac{n - \sum_{k=0}^{n-1} p_k(n-k)}{\alpha},$$

где $p_к$ – вероятность того, что в СМО находится к заявок; если к ≤ n, то $p_к = \frac{\alpha^к}{к!}\cdot p_0$; если к > n, то $p_к$ определяется по более сложной формуле

$$p_к = \frac{\alpha^k}{n!\prod\limits_{l=1}^{k-n}(n + l \cdot \beta)} \cdot p_0;$$

2) вероятность отказа в обслуживании $p_{отк} = 1 - p_{обс} = 1 - Q$;

3) абсолютная пропускная способность $A = \lambda Q$;

4) среднее число занятых каналов $\overline{n}_з = \alpha Q$;

5) среднее число заявок в очереди $L_{оч} = \dfrac{\alpha}{\beta} p_{отк}$;

6) среднее число заявок в системе $L_{сист} = L_{оч} + \overline{n}_з$.

6.5. *n*-канальная СМО с ограниченной длиной очереди

Исходная ситуация: имеется n-канальная система, на вход которой поступает простейший поток заявок плотностью λ. Если заявка поступила в момент, когда все каналы заняты, она включается в очередь только в том случае, если в ней находится меньше m заявок. Если число заявок в очереди уже равно m, то очередная заявка получает отказ и покидает систему. Время обслуживания заявок случайное и распределено по показательному закону.

Для данной системы $p_к = \dfrac{\alpha^к}{к!} \cdot p_0$, если к ≤ n; $p_к = \dfrac{\alpha^k}{n!n^{k-n}} \cdot p_0$, если к > n; $p_0 = \dfrac{1}{1 + \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\alpha^k}{k!} + \dfrac{\alpha^n}{n!}\sum\limits_{r=1}^{m}(\dfrac{\alpha}{n})^r}$.

Основные показатели эффективности этой СМО можно рассчитать по следующим формулам:

1) вероятность отказа в обслуживании $p_{отк} = p_{n+m} = \dfrac{\alpha^{n+m}}{n!n^m} \cdot p_0$;

2) среднее число занятых каналов $\overline{n}_з = \alpha \cdot (1 - p_{отк})$;

3) среднее число заявок в очереди $L_{оч} = \sum\limits_{k=n+1}^{n+m}(k - n) \cdot p_k$;

4) среднее время пребывания заявки в очереди $W_{оч} = \dfrac{L_{оч}}{\lambda(1 - p_{отк})}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беляков, Г.С. Динамическое программирование: методические указания к курсу «Математические методы исследования экономики» / Г.С. Беляков. – М.: МАДИ, 1997. – 24 с.

2. Беляков, Г.С. Методические указания к курсовому проекту по дисциплине «Организация строительного производства» / Г.С. Беляков. – М.: МАДИ, 1995. – 44 с.

3. Панов, С.А. Экономико-математические методы на автомобильном транспорте: методическое пособие / С.А. Панов, А.Г. Краузе. – М.: МАДИ, 2002. – 53 с.

БЕЛЯКОВ Глеб Станиславович
ГУЖОВ Станислав Александрович

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ
ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ
МЕТОДОВ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ
ВЫПУСКНЫХ КВАЛИФИКАЦИОННЫХ
РАБОТ БАКАЛАВРА

Редактор Н.П. Лапина

Подписано в печать 05.06.2015 г. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 3,25. Тираж 100 экз. Заказ . Цена 110 руб.
МАДИ, 125319, Москва, Ленинградский пр-т, 64.